Основні методи інтегрування

1. **Безпосереднє інтегрування** – інтегрування, котре проводиться за допомогою таблиць без додаткових перетворень.
2. **Метод розкладання**. Метод базується на розкладанні підінтегральної функції на суму функцій, кожна з яких є табличною.
3. **Інтегрування підстановкою (заміна змінної)**.

Зміст цього методу полягає в тому, що в інтегралі $\int f(x)dx$ робиться заміна змінної $x = f(t)$, тобто вводиться нова змінна t замість x. Диференціал $dx = f'(t)dt$. Тоді початковий інтеграл переписується у вигляді:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Якщо підстановка (заміна змінної) вдала, то другий інтеграл легко береться.

4. **Інтегрування частинами**. Розглянемо дві неперервні (диференційовані) функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$. Утворимо диференціал добутку цих функцій:

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Звідси

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

або

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Таким чином, інтеграл $\int udv$ зводиться до інтеграла $\int vdu$, який часто береться більш просто.

Тема 3. Поняття про диференціальні рівняння	• Диференціальні рівняння першого порядку зі змінними, що розділяються. • Лінійні, однорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами. • Методи розв'язання диференціальних рівнянь.

Поняття про диференціальні рівняння

Диференціальним називається рівняння, в яке, крім функції y і незалежної змінної x, входять похідні функції y', y'', ..., $y^{(n)}$ (або диференціали dx і dy). Загальний вигляд диференціального рівняння у випадку функції однієї змінної:

$$F_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ або } F_2(x, y, dx, dy) = 0.$$

Найвищий порядок похідної, яка входить до диференціального рівняння, називають **порядком** диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння називається **лінійним**, якщо невідома функція y та її похідні y', y'', ... входять у рівняння тільки в першому ступені. В іншому випадку – рівняння нелінійне.

Розв'язком звичайного диференціального рівняння n-го порядку називається кожна функція $y = f(x)$, підстановка якої, разом з її похідними, перетворює його в тотожність. Процедуру знаходження розв'язків диференціального рівняння називають інтегруванням цього рівняння.

У випадку функції однієї змінної ($y = f(x)$) рівняння називають **звичайним** диференціальним рівнянням. У випадку двох ($y = f(x_1, x_2)$) і більше змінних рівняння називають диференціальним рівнянням **в частинних похідних**.

Лінійні диференціальні рівняння

Лінійне диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд:

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\cdot y = b(x),$$

де y – шукана функція, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... , $a_n(x)$ – відомі функції незалежної змінної, їх ще називають коефіцієнтами диференціального рівняння. Якщо коефіцієнти при невідомій функції y та її похідних не залежать від x, тобто є константами, то рівняння називається диференціальним рівнянням з **постійними**

коефіцієнтами. У протилежному випадку – диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами.

Рівняння, в якому $b(x) \neq 0$, називається **неоднорідним**, якщо ж $b(x) = 0$, то рівняння – **однорідне**.

У відповідність однорідному диференціальному рівнянню можна поставити алгебраїчне рівняння відносно змінної λ

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

яке називають **характеристичним** для даного диференціального рівняння. Якщо λ – корінь характеристичного рівняння, то $y = e^{\lambda x}$ – розв'язок диференціального рівняння. Кожному дійсному кореню кратності m відповідає набір лінійно незалежних розв'язків

$$y = e^{\lambda x},\ y = xe^{\lambda x}, \ldots,\ y = x^m e^{\lambda x}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння – розв'язок, який є лінійною комбінацією незалежних розв'язків:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i,$$

де C_1, C_2, ..., C_n – довільні константи, y_i – лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння . Розв'язок, який отримується із загального при деяких фіксованих значеннях констант C_1, C_2, ..., C_n, називають **частинним розв'язком**.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку має загальний вигляд:

$$F(x, y, y') = 0 \text{ або } y' = f(x, y).$$

Загальний розв'язок такого рівняння має вигляд:

$$y = f(x) + C,$$

де C – деяка константа. Такий розв'язок ще називають загальним інтегралом диференціального рівняння першого порядку. Загальний інтеграл з визначеним

числовим значенням константи C називається **частинним розв'язком** диференціального рівняння.

Диференціальні рівняння зі змінними, що розділяються

У рівнянні $y' = f(x, y)$ запишемо y' через відношення диференціалів $y' = \dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Такому рівнянню можна надати вигляду:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Припустимо, що $M(x, y)$ та $N(x, y)$ можна подати добутками:

$$M(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y),\ N(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y),$$

в яких співмножники залежать лише від однієї змінної. Тоді

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Рівняння можна інтегрувати. Цю процедуру називають розділенням змінних. Загальний інтеграл такого рівняння має вигляд:

$$F_1(x) + F_2(y) = C,$$

де F_1 та F_2 – первісні для функцій $\dfrac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$ та $\dfrac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}$ відповідно.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Звичайне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд:

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Загальний вигляд неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де $f(x)$ – доданок, вільний від невідомої функції. Якщо $f(x)=0$, то

$$y''+py'+qy=0$$

– однорідне диференціальне рівняння другого порядку.

Будемо шукати розв'язок у вигляді $y=e^{\lambda x}$, де λ – деяка константа. Перша та друга похідні: $y'=\lambda e^{\lambda x}$; $y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$. Підставляємо в рівняння та отримуємо

$$e^{\lambda x}(\lambda^2+p\lambda+q)=0\,.$$

Відповідно маємо **характеристичне рівняння** для даного однорідного

$$\lambda^2+p\lambda+q=0\,.$$

Це алгебраїчне рівняння є квадратним, де корені:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,.$$

Залежно від знака дискримінанта можливі три варіанти:

1) $\dfrac{p^2}{4}-q>0$. В цьому випадку обидва корені різні й існує два лінійно незалежні розв'язки: $y_1=e^{\lambda_1 x}$ і $y_2=e^{\lambda_2 x}$. Загальний розв'язок (загальний інтеграл) має вигляд:

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x},$$

де C_1 і C_2 – постійні коефіцієнти.

2) $\dfrac{p^2}{4}-q=0$. У такому випадку $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ – кратний корінь. Частинні розв'язки вибираються у вигляді: $y_1=e^{\lambda x}$ та $y_2=xe^{\lambda x}$. Загальний розв'язок:

$$y=C_1e^{\lambda x}+xC_2e^{\lambda x}.$$

3) Останній із випадків є найбільш складний і найбільш цікавий водночас. При $\dfrac{p^2}{4}-q<0$ коренями є комплексні спряжені числа

$$\lambda_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=\alpha\pm i\beta\,,$$

де $i=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця, $\alpha=-\dfrac{p}{2}$ – дійсна частина, $i\beta=i\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$ – уявна частина комплексного числа.

Частинні розв'язки диференціального рівняння мають вигляд:

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),$$

$$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

В перетворенні була використана формула Ейлера

$$e^{\pm i\beta x}=\cos\beta x\pm\sin\beta x\,.$$

Дві незалежні лінійні комбінації цих розв'язків складаються таким чином:

$$\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x,\qquad \frac{y_1-y_2}{2i}=e^{\alpha x}\cos\beta x\,.$$

Загальний розв'язок можна подати у вигляді:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Загальний розв'язок можна подати в іншому еквівалентному вигляді записавши константи $C_1=A\cos\varphi_0$, $C_2=-A\sin\varphi_0$. Тоді матимемо:

$$y=Ae^{\alpha x}\cos(\beta x+\varphi_0),$$

де A та φ_0 – дві незалежні константи.